

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Кожедеров Александр Игоревич
Должность: Директор филиала ИнДИ (филиал) ФГБОУ ВО "ЮГУ"
Дата подписания: 16.07.2026 23:55:14
Уникальный программный ключ: 7f4522f81a862743c2711b37d9dd0f6adf40c4c8

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Элементы высшей математики

Направление подготовки (специальности): 21.03.01 *Нефтегазовое дело*

Профиль: *Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти (ИнДИ)*

Форма обучения
Очно-заочная

Квалификация выпускника
Бакалавр

2026 год набора

Виды работ	Объём занятий по семестрам, час										Итого
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Самостоятельная работа	52										52
Дистанционные лекции	10										10
Дистанционные практические занятия	10										10
Форма контроля	Зачёты										-
Итого:	72										72
з.е.	2										2

Ханты-Мансийск, 2026 год
(город)

Предисловие

1. Программа разработана в соответствии с требованиями Федерального закона от 27.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации», федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки (специальности) *21.03.01 Нефтегазовое дело* утвержденного № 96 от 09.02.2018 года.

2. Разработчик(и):

Кандидат наук

ученая степень, ученое звание
(при наличии)

(подпись)

А. П. Янукян

(И. О. Фамилия)

3. Согласовано:

Руководитель
образовательной
программы по
направлению подготовки
21.03.01 Нефтегазовое
дело

(подпись)

Г. В. Газя

(И. О. Фамилия)

4. Утверждаю:

Руководитель
структурного
подразделения
Индустриальный институт
(г. Нефтеюганск)

(подпись)

А. П. Янукян

(И. О. Фамилия)

Документ подписан простой электронной подписью в
электронной информационно образовательной среде
Elios 2.0 ФГБОУ ВО «ЮГУ»

Идентификатор документа: 95264



Подписант



Янукян Арам Погосович

Дата подписания

13.05.2026 15:00:27



Газя Геннадий Владимирович

13.05.2026 15:49:15

1 Цель освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины является формирование личности обучающихся, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений; обучение методам обработки и анализа результатов экспериментальных данных.

2 Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части блока Б1 учебного плана, модуля «Модуль Информационные технологии и искусственный интеллект».

3 Формируемые компетенции обучающегося

Планируемые результаты освоения ОПОП (компетенции), достижение которых обеспечивает дисциплина		Планируемые результаты (соотнесенные с установленными индикаторами достижения компетенции)
код компетенции	наименование компетенции	
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 3-1: Знает основные математические методы решения задач, принципы математических рассуждений, математических доказательств и системного подхода УК-1.2 3-1: Знает возможности и принципы функционирования цифровых сервисов и технологий, используемых для работы с информацией УК-1.3 3-1: Знает основные различия между фактами, мнениями, интерпретациями и оценкам УК-1.4 3-1: Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.1 У-1: Умеет обосновывать выбор варианта решения и практически применять стандартные математические методы и системный подход в решении поставленных задач УК-1.2 У-1: Умеет обосновывать выбор и использовать цифровые сервисы и технологии для безопасной и эффективной работы с информацией УК-1.3 У-1:

		Умеет формировать собственную позицию о фактах, мнениях, интерпретациях и оценках информации УК-1.4 У-1: Умеет критически оценивать полноту, адекватность и достоверность информации, необходимой для решения поставленных задач УК-1.5 У-1: Умеет производить постановку проблемы путем фиксации ее содержания, выявления субъекта проблемы, а также всех заинтересованных сторон в данной ситуации, а также осуществлять анализ ситуации в реальных социальных условиях для выявления актуальной, в т.ч. социально-значимой задачи/проблемы, требующей решения УК-1.1 В-1: Владеет навыком решения различных прикладных задач с использованием математических методов и системного подхода УК-1.2 В-1: Имеет практический опыт решения задач обработки информации с использованием различных цифровых сервисов и технологий, в т.ч. во взаимодействии с другими людьми в цифровой среде УК-1.3 В-1: Владеет навыками рассуждения и аргументации УК-1.4 В-1: Владеет навыками систематизации и синтеза информации, полученной из различных источников УК-1.5 В-1: Имеет опыт определения требований и ожиданий заинтересованных сторон с учетом социального контекста
--	--	---

4 Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единицы, 72 часа.

№	Тема	Трудоемкость по видам	С	М	П	С	О	Оценочные
---	------	-----------------------	---	---	---	---	---	-----------

п/п		учебной работы, час						средства
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Лабораторные занятия	Консультации	Самостоятельная работа		
1	Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
3	Введение в математический анализ: числовые последовательности. Пределы» и «Приложения производной функции одной переменной	2	2			6	УК-1.	Контрольная работа; Практическое задание.
4	Неопределенный интеграл	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
5	Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл	1	1			4	УК-1.	Контрольная работа.
6	Комплексные числа	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
7	Вычисление дифференциальных уравнений первого порядка	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
8	Дифференциальные уравнения высших порядков	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
9	Ряды	1	1			6	УК-1.	Контрольная работа.
Итого		10	10			52	–	

5 Образовательные технологии, используемые при различных видах учебной работы

№ темы	Образовательная технология
1-9	Дистанционные технологии
1-9	Технология традиционного обучения

6 Методические материалы по освоению дисциплины

Электронная информационно - образовательная среда представлена личным кабинетом, расположенным по ссылке <https://itport.ugrasu.ru>, электронной библиотечной системой <https://lib.ugrasu.ru>, электронным каталогом Научной библиотеки ЮГУ <https://irbis.ugrasu.ru> и системой дистанционного обучения.

Методические материалы для обучающихся представлены в электронном виде в системе Moodle по ссылке <http://eluniver.ugrasu.ru>.

Методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ОВЗ предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

6.1 Методические указания к занятиям лекционного типа

Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; пометить важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удастся разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать его научно-педагогическому работнику на консультации, на практическом занятии.

6.2 Методические указания к практическим занятиям

Целью практических занятий является закрепление теоретических знаний и приобретение практических умений и навыков. Методические рекомендации по каждой практической работе имеют теоретическую часть, подготовленную отдельно, или указание на источник, необходимый для подготовки к соответствующему практическому занятию, с необходимыми для выполнения работы формулами, пояснениями, таблицами и графиками; алгоритм выполнения заданий. Практические задания сочетаются с теоретическими знаниями. Проведению практического занятия как правило предшествует самостоятельная работа обучающегося.

6.3 Методические указания к самостоятельной работе

В рамках самостоятельной работы обучающийся знакомится с рабочей программой, особое внимание должно уделяться целям и задачам, структуре и содержанию дисциплины. Анализируется конспект лекций, ведется подготовка ответов к контрольным вопросам, просматривается рекомендуемая литература, используются аудио-видеозаписи по заданной теме, решаются расчетно-графические задания, задачи по алгоритму и др.

7 Оценочные материалы для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины, учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся.

Текущий контроль успеваемости обеспечивает оценивание хода освоения дисциплин (модулей). Для осуществления процедуры текущего контроля

успеваемости обучающихся НПР создаются оценочные материалы (фонды оценочных средств), позволяющие оценить достижение запланированных результатов обучения и уровень сформированности компетенций.

Промежуточная аттестация обучающихся производится в дискретные временные интервалы НПР, обеспечивающими реализацию дисциплины в форме: зачёты.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся предполагает предоставление студентам методических рекомендаций по изучению дисциплины, учитывающих особенности ее построения, освоения, преподавания и представлено как электронный учебно-методический комплект документов по дисциплине, размещено в системе управления обучением «Moodle» (сайт Университета по ссылке <http://eluniver.ugrasu.ru>) и/или в других системах управления обучением электронной информационно-образовательной среды Университета.

Обучение и контроль обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

7.1 Технологическая карта дисциплины 1-й семестр

№ п/п	Название темы	Максимальное количество баллов
Обязательный уровень (текущая аттестация)		
1	Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ	5
2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	5
3	Введение в математический анализ: числовые последовательности. Пределы» и «Приложения производной функции одной переменной	15
4	Неопределенный интеграл	15
5	Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл	10
6	Комплексные числа	5
7	Вычисление дифференциальных уравнений первого порядка	5
8	Дифференциальные уравнения высших порядков	5
9	Ряды	5
		70
Обязательный уровень (промежуточная аттестация)		
10	Зачёты	30
		30
	Итого	100
Дополнительный уровень		
11	Коллоквиум	15
		15

Шкала оценивания результатов по балльной системе (зачёты):

Зачтено с 50 по 100 баллов;

Не зачтено с 0 по 49 баллов.

7.2 Примерные задания к контрольным работам

1. Контрольная работа № 1 «Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ».

Эталонный вариант

1. Вычислить определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить матрицу

$$D = A \cdot B - C^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы

б) по формулам Крамера

в) методом Гаусса

4. Исследовать систему на совместимость. Найти общее и одно частное.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

5. Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Контрольная работа № 2 «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве».

Эталонный вариант

1. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее. Укажите координаты вершин, фокусов. Напишите уравнение директрисы и асимптот, если они есть. Вычислите эксцентриситет кривой.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$$

2. Постройте кривую в полярной системе координат $r = 2\varphi$.

3. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

4. Найти расстояние от точки $M_0(5; 4; -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 4; 0)$, $M_2(0; 4; -3)$, $M_3(3; 0; 3)$

3. Контрольная работа № 3 «Введение в математический анализ: числовые последовательности. Пределы» и «Приложения производной функции одной переменной».

Эталонный вариант

1. Вычислить пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7x+1}-1}{x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

2. Найти производные заданных функций

а) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7-x^2}}$

б) $x \cdot y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

3. Исследовать функцию и построить ее график $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$

4. Напишите уравнения касательной и нормали в заданной точке $y = \frac{x}{x^2+1}$, $x_0 = -2$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке $y = 2\sqrt{x} - x$ при $x \in [0; 4]$

4. Контрольная работа № 4 «Неопределенный интеграл».

Эталонный вариант

Вычислить следующие неопределенные интегралы

1) $\int (x+4) \sin x dx$ 2) $\int \arcsin x dx$ 3) $\int (x^2 + 7x + 5) \cos 2x dx$ 4) $\int (2x+1)^2 e^{-x} dx$

5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 6) $\int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx$ 7) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$ 8) $\int (3+4x)^{10} dx$ 9) $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3-8} dx$

10) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

5. Контрольная работа №5 «Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл».

Эталонный вариант

Задание № 1

Вычислите определенные интегралы.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx$

Задание № 2

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$$

Задание № 3

Вычислите длину дуги кривой.

$$y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$$

Задание № 4

Вычислите несобственные интегралы или исследуйте их на сходимость.

а) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

б) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$

6. Контрольная работа № 6 «Комплексные числа»

Эталонный вариант

1. Выполнить указанные действия.

$$(i)^{43} + \frac{2}{2+3i}$$

$$\frac{3-4i}{4+3i} + 3 + (i)^{17}$$

2. Представить комплексное число в тригонометрической форме.

$$-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$$

$$-\sqrt{2} - \sqrt{6}i$$

3. Вычислить корень.

$$\sqrt[3]{3i - \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{7+7i}$$

4. Решить уравнение.

$$z^3 + 3i - \sqrt{3} = 0$$

5. Представить число в показательной форме.

$$\frac{7}{2} + \frac{7}{2\sqrt{3}}i$$

$$2 - 2\sqrt{3}i$$

6. Контрольная работа № 7 «Вычисление дифференциальных уравнений первого порядка».

Эталонный вариант

1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения.
(Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$).

$$3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0.$$

2. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$$

3. Найдите решение задачи Коши.

$$y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$$

4. Найдите решение задачи Коши.

$$xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1.$$

7. Контрольная работа № 8 «Дифференциальные уравнения высших порядков».

Эталонный вариант

$$xy''' + y'' = \sqrt{x}.$$

$$y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$$

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x.$$

2. Найти решение задачи Коши.

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

8. Контрольная работа №9 «Ряды».

Эталонный вариант Исследовать сходимость знакоположительных рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3n}{5n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{3^n \cdot n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$

1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. Если он сходится, то указать абсолютно или условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n^2}$$

2. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} (x+1)^n$$

7.3 Примерный комплект практических заданий

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Цель практических занятий – понять термин «предел», изучить его свойства, приобрести навыки его вычисления и научиться исследовать функцию на непрерывность.

Таблица 1

№	Наименование темы	Кол-во часов
1	Предел последовательности	2
2	Вычисление предела функции	3
3	Первый и второй замечательный предел	3
4	Непрерывность функции. Точки разрыва	2
5	Подготовка к устному опросу и контрольной работе. Вычисление пределов функции разными способами.	2
6	Устный опрос	0,5
7	Контрольная работа	2

1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательностью $\{x_n\}$ называется пронумерованное бесконечное множество чисел: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Обычно числовую последовательность задают формулой

$$a_n = f(n).$$

Пример 3.1

Формула $a_n = 2n - 1$ числам натурального ряда $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ставит в соответствие последовательность нечетных чисел $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Пример 3.2

Формула $a_n = \frac{n}{2n+1}$ задает возрастающую последовательность правильных дробей $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots$

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) существует такое положительное число N , что абсолютная величина разности $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Обозначается: $\lim_{n \rightarrow \infty} x = a$

Замечание 3.1 В пределе последовательности «динамическая» n может стремиться только к «плюс бесконечности».

Замечание 3.2 Последовательность «дискретна» (прерывна), то есть состоит из отдельных изолированных членов.

Замечание 3.3 В пределах последовательностей часто встречаются факториалы (свернутая запись произведения) и прогрессии.

Пример 3.3

Найдите пределы последовательностей:

а) $x_n = \frac{4n^3 + 3n + 1}{3 + 2n^2 + 5n^3}$

б) $x_n = \frac{\sqrt{3n^3 + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$

в) $x_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{3 + 2n^3}$

Решение

Принцип решения: в числителе и знаменателе выносятся члены со старшей степенью n , которые потом сокращаются.

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n + 1}{3 + 2n^2 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot \left(4 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n} + 5\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n} + 5} = \frac{4 + 0 + 0}{0 + 0 + 5} = \frac{4}{5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{3n^3 + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} \left(\frac{\sqrt{3n^3 + n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} \right)}{\sqrt{n^3} \cdot \left(\sqrt{\frac{n^3 + 1}{n^3}} \right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{3n^3 + n}{n^3}} + \sqrt{\frac{n}{n^3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{3 + 0} + \sqrt{0}}{\sqrt{1 + 0}} = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \dots + n}{3 + 2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n}{3 + 2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2}{2 \cdot (3 + 2n^3)} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + 1\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n^3} + 2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^3} + 2\right)} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{0 + 1}{0 + 2} = 0.
 \end{aligned}$$

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что для любых $x \in X$ и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство (определение на языке « $\varepsilon - \delta$ »).

Это записывается следующим образом: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Правила вычисления пределов функций

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \text{ где } c - \text{const.}$$

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

справедливы равенства:

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ в частности}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot g(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0,$$

$$5. \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

Таблица 2

Вычисление предела суммы $f(x) + g(x)$ 1. A, B – конечные числа $\Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B.$ 2. $A = +\infty; B = +\infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [+ \infty + \infty] = +\infty.$ 3. $A = -\infty; B = -\infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [- \infty - \infty] = -\infty.$ 4. $A = \infty, B$ – конечное число $\Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [\infty + B] = \infty.$ 5. $A = +\infty; B = -\infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [+ \infty - \infty].$	Вычисление предела произведения $f(x) \cdot g(x)$ 1. A, B – конечные числа, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B.$ 2. $A \neq 0; B = \infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [A \cdot \infty] = \infty.$ 3. $A = 0; B = \infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [0 \cdot \infty].$ 4. $A = \infty, B = \infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [\infty \cdot \infty] = \infty.$
Вычисление предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ 1. A, B – конечные числа, $B \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$ 2. $A \neq 0; B = 0 \Rightarrow$	Вычисление предела функции $(f(x))^{g(x)}$ 1. A, B – конечные числа $\Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = A^B.$ 2. $0 < A < 1, B = +\infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = [A^{+\infty}] = 0.$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{A}{0} \right] = \infty.$	$3. A > 1, B = +\infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{+\infty}] = +\infty.$
$3. A - \text{конечное число}, B = \infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{A}{\infty} \right] = 0.$	$4. 0 < A < 1, B = -\infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{-\infty}] = +\infty.$
$4. A = \infty, B - \text{конечное число} \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{B} \right] = \infty.$	$5. A > 1, B = -\infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{-\infty}] = +\infty.$
$5. A = 0, B = 0 \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$	$6. A = 1, B = \infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [1^{\infty}]$
$6. A = \infty, B = \infty \Rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right].$	$7. A = 0, B = 0 \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [0^0]$
	$8. A = \infty, B = 0 \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [\infty^0]$
	$9. A - \text{конечное число}, B = \pm\infty \Rightarrow$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{\pm\infty}] - \text{не существует.}$

Замечание 4.1 При подстановке предельного значения аргумента в функцию, иногда получаем неопределенные выражения, символически обозначаемые как $\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [0^0], [\infty^0], [1^{\infty}]$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Любой предел состоит из трех частей:

а) Знак *Lim*. Иногда пределы так и называют *лимитами*.

б) Запись под знаком предела.

Обычно читается «икс стремится к ...». Хотя вместо x на практике встречаются и другие переменные.

в) Функция под знаком предела.

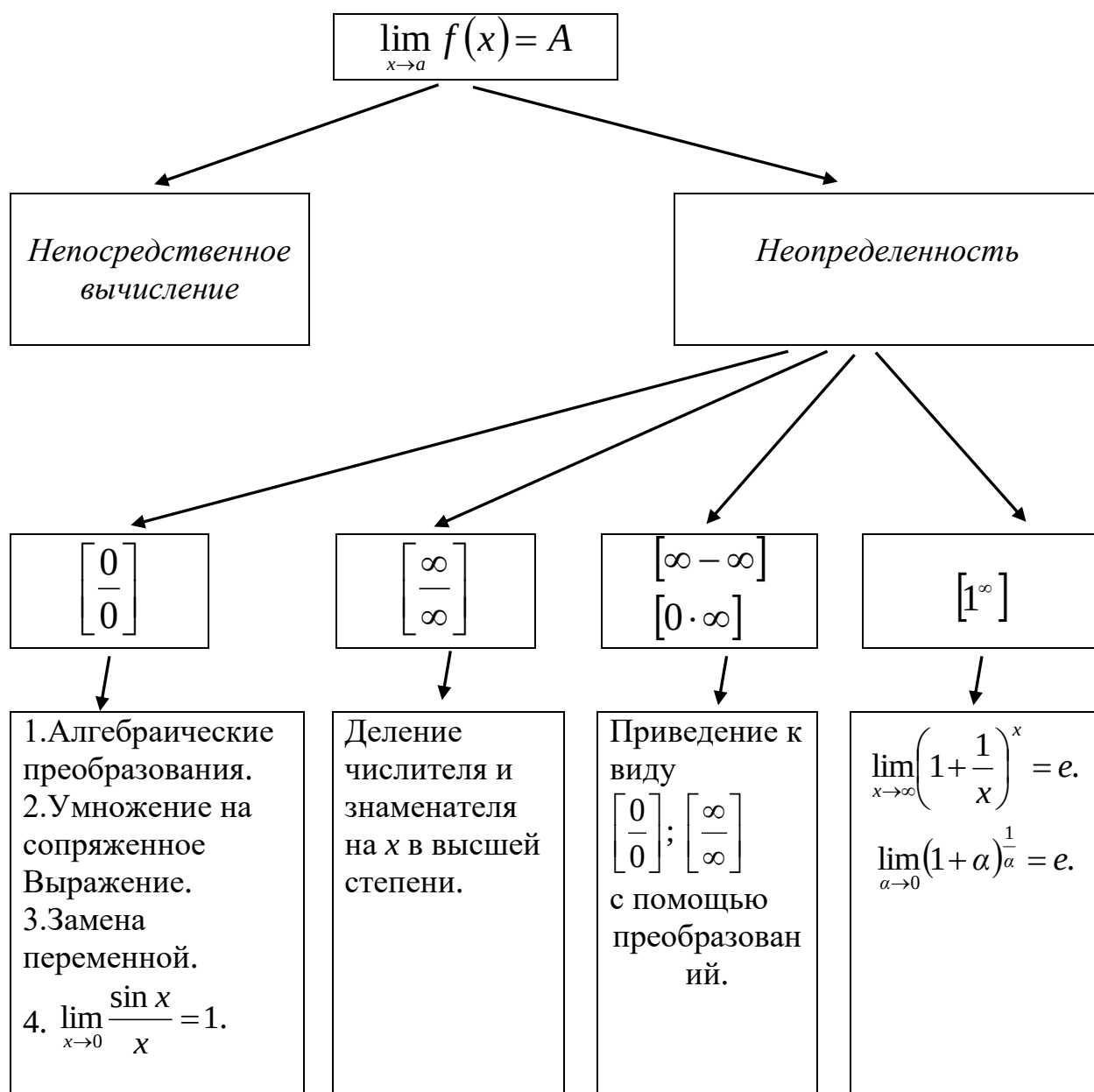
Например, запись $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{3x}$ читается как: «предел функции $\frac{x+5}{3x}$ при x стремящемся к единице».

Замечание 5.1 Если требуется решить предел, то сначала достаточно подставить число, к которому стремится переменная, в функцию.

$$\text{Например, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{3x} = \frac{1+5}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Рассмотрим схему способов вычисления пределов

Схема 1



Обратимся к тактике вычисления пределов, которую рассмотрим на примерах.

Раскрытие неопределенностей

I. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

Основной способ вычисления: каждый элемент числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наибольшей степени (или вынести за скобки в числителе и знаменателе наибольшую степень x каждого из них).

Пример 5.1

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 9}{4x^3 - 7}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 9}{5x + 6}$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{2x^2 - 4x - 9}$$

Решение

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 9}{4x^3 - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{9}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{7}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3}}{4 - \frac{7}{x^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 9}{5x + 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}}{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{0 + 0} =$$

$$\frac{2 - 0 - 0}{0 + 0} = \frac{2}{0} = \infty.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{2x^2 - 4x - 9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}} = \frac{0 + 0}{2 - 0 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Замечание 5.2 Если сравнить наивысшие степени x числителя и знаменателя в неопределенностях вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, получаем:

1. ∞ , если степень выше в числителе;
2. 0 , если степень выше в знаменателе;
3. отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.

II. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$

(Дробно-рациональные функции)

Основной способ вычисления: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x - a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель.

После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру.

Для разложения на множители используют разные способы: вынесение общего множителя за скобки, деление многочленов, формулы сокращенного умножения и другие тождества.

Замечание 5.3 Полезно вспомнить следующие формулы:

1. $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 - b^3$

$$5. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$$

$$6. a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$7. a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$8. ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 5.2

Вычислите следующие пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

Решение

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (x-2)}{(x-5) \cdot (x-4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-2) + (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}.$$

III. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$

(Дробно-иррациональные функции)

Основной способ вычисления:

а) умножение числителя и знаменателя на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

б) метод замены переменной

Пример 5.3

Вычислите следующие пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

Решение

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{(t-1) \cdot (t^2 + t + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x} + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt[3]{x} + 1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{((\sqrt{x+10})^2 - (\sqrt{2x+11})^2) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+10-2x-11) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}} = - \frac{3}{6} = - \frac{1}{2}.$$

IV. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$

Основной способ вычисления: преобразование функции к виду дроби и приведением к неопределенностям $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Пример 5.4

Вычислите следующие пределы:

$$а) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$$

Решение

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x-1) \cdot (x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 6x} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{6}{x}\right)} + x} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{6}{x}} + x} = 6 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1 \right)} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

V. Первый замечательный предел

Обычно к первому замечательному пределу сводятся пределы от функций, в которых участвуют тригонометрические выражения.

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Замечание 5.4 Если аргумент $\sin$ и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию, которая стремится к нулю, то имеет место конструкция первого замечательного предела, т. е. $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

Пример 5.5

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\cos^2 x - \cos^2 a}$

Решение

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{5x}{2} \right)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{25}{4} \cdot \sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2} \cdot \frac{5x}{2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x \cdot 5x}{5 \cdot 3x \cdot \sin 5x} = \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\cos^2 x - \cos^2 a} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\cos^2 x - \cos^2 a) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(\cos x - \cos a) \cdot (\cos x + \cos a) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2 \cos a} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\cos x - \cos a} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{-2 \sin \frac{x - a}{2} \cdot \sin \frac{x + a}{2}} = -\frac{1}{8 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos a \cdot \sin a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x - a}{2} \cdot 2}{\sin \frac{x - a}{2}} = \\ &= -\frac{2}{8 \sqrt{a} \cdot \cos a \cdot \sin a} = -\frac{1}{2 \sqrt{a}} = -\frac{1}{2 \sqrt{a} \cdot (2 \cos a \cdot \sin a)} = -\frac{1}{2 \sqrt{a} \cdot \sin 2a}. \end{aligned}$$

Замечание 5.5 Часто также применяют известные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

VI. Второй замечательный предел

Имеет следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ко второму замечательному часто сводят показательно-степенную неопределенность $[1^\infty]$

Пример 5.6

Вычислите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-3} \right)^{4x}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{2}{3x}}$$

Решение

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x}} = e^2.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-3} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{4x-3} \right)^{\frac{4x-3}{8} \cdot \frac{8}{4x-3} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32x}{4x-3}} = e^{\frac{32}{4}} = e^8.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x} \cdot \frac{5x}{1} \cdot \frac{2}{3x}} = e^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{e^{10}}.$$

4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой функцией* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = +\infty$, или $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = -\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} |\beta(x)| = +\infty$.

Замечание 6.1 Если при $x \rightarrow x_0$ $\beta(x)$ – бесконечно большая функция, то $\frac{1}{\beta(x)}$ является бесконечно малой функцией; если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = \text{const}$, $A \neq 0$, $A \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми функциями одного порядка малости* при $x \rightarrow x_0$.

В частности, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными функциями* при $x \rightarrow x_0$ (записывается $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$).

Приведем формулы эквивалентных бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$:

1. $\sin x \sim x$
2. $\operatorname{tg} x \sim x$
3. $\arcsin x \sim x$
4. $\operatorname{arcbg} x \sim x$
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $e^x - 1 \sim x$
8. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1$
9. $(1+x)^m - 1 \sim m \cdot x$

$$10. \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n} \cdot x$$

Пример 6.1

Вычислите следующие пределы, применяя формулы эквивалентных бесконечно малых функций:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x^x}{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \ln(1-3x)}$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^3} - 1}$

Решение

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{10x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x^2}{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \ln(1-3x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\frac{x}{2} \cdot (-3x)} = -\frac{5}{\frac{3}{2}} = -\frac{10}{3}.$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^3} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (2x - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9x^2}{4}}{x \cdot (2 - x^2)} =$
 $= \frac{9}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - x^2} = \frac{9}{4} \cdot 0 = 0.$

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

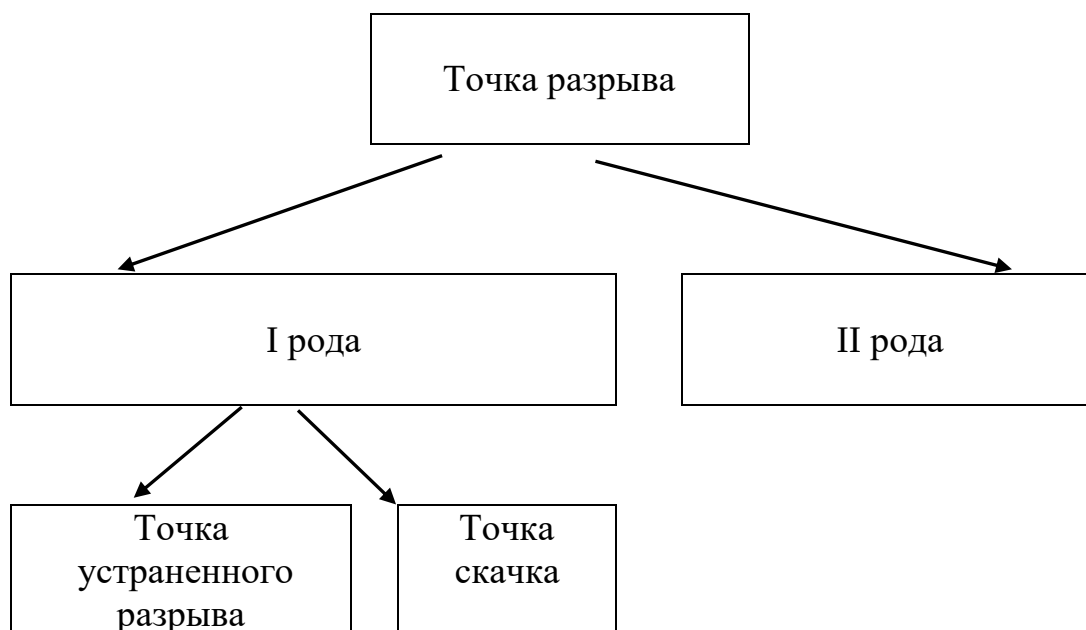
Функция называется *непрерывной* в точке x_0 из области определения функции, если предел ее при $x \rightarrow x_0$ существует и равен значению в этой точке: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е.

1) значение функции $f(x_0)$ существует,

2) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$

Точка x_0 , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Схема 2



Число A называется пределом *справа* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \right)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < x - x_0 < \delta$ и входящих в область определения $f(x)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел *слева* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \right)$.

В случае $x_0 = 0$ будем записывать $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow -0$.

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется *точкой разрыва I рода*.

Точка устранимого разрыва ($f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$) это точка в которой левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.

Точка скачка $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ это точка в которой левый и правый пределы функции в точке x_0 различны.

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции в точке x_0 .

Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В этих точках не существует хотя один из односторонних пределов.

Пример 7.1

Найдите в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \\ -1, & x > 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x}{x-4} \quad \text{при } x \rightarrow 4.$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2,5, \\ 2x-7, & 2,5 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Решение

а) Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$

При $x \rightarrow 1-0$ $f(x) = x$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1-0 = 1$,

при $x \rightarrow 1+0$ $f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1$,

при $x \rightarrow 2-0$ $f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 2-0} 1 = 1$,

при $x \rightarrow 2+0$ $f(x) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow 2+0} (-1) = -1$.

б) Область определения функции $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

в) Область определения функции $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = \frac{4-0}{4-0-4} = \frac{4}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = \frac{4+0}{4+0-4} = \frac{4}{+0} = +\infty.$$

$x = 4$ – точка разрыва II рода.

г) Область определения функции $x \in [0; +\infty)$

исследуем точки $x = 1$, $x = 2,5$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2\sqrt{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4-2x) = 2, \quad \text{т.е. } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

В точке $x = 1$ выполняются все условия непрерывности.

$$\lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5-0} (4-2x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5+0} (2x-7) = -2.$$

$x = 2,5$ – точка разрыва I рода – точка скачка.

Скачок функции в этой точке равен

$$\lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = -2 - (-1) = -1.$$

Замечание 7.1 Иногда можно говорить о непрерывности функции $f(x)$ только слева (или только справа): $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ($f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Например, функция $f(x) = \sqrt{3-x}$, определенная при $x \leq 3$, в точке $x = 3$ непрерывна только слева: $f(3-0) = \sqrt{3-(3-0)} = \sqrt{+0} = 0$ и $f(3) = \sqrt{3-3} = 0$, $f(3-0) = f(3)$, а справа от этой точки функция вообще не определена. Окончательно, $f(x)$ непрерывна на луче $(-\infty; 3]$.

6. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может самой точки x_0 , причем $g'(x) \neq 0$, и если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty, \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{при}$$

условии, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует.

Точка x_0 может быть, как конечной, так и несобственной точкой $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 8.1 Неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ или $[\infty - \infty]$ приводятся к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ различными алгебраическими преобразованиями.

Замечание 8.2 Если после применения правила Лопиталья снова получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и для $f'(x)$ и $g'(x)$ выполнены условия, сформулированные для функций $f(x)$ и $g(x)$, правило применяется до тех пор, пока неопределенность не устранилась или не обнаружится, что нужные пределы не существуют.

Замечание 8.3 Неопределенности вида $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$ приводятся к неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ с помощью предварительного логарифмирования или преобразования, использующего основное логарифмическое тождество

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

Пример 8.1

Применяя правило Лопиталья, найдите следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$$

Решение

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 \cdot 1 + \frac{1}{1}}{e^1} = \frac{3}{e}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)'}{(x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{1 + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right)'}{(1 + e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \left(2 + \frac{x}{2} \right)}{e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{x}{2} \right)'}{\left(e^{\frac{x}{2}} \right)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{x \cdot (e^x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x (2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)};$$

Найдем отдельно предел степени при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos x) = 0.$$

Возвращаясь к исходному пределу, будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x) \cdot x} = e^0 = 1.$$

7. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных направлениях (баллы определяются, согласно рабочей программы по математике).

Вариант № 1

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + 3x - 2}; \quad \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = -2; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\sin^2 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x \leq -2, \\ x^2 - 1 & \text{при } -2 < x \leq 1, \\ -2x + 3 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Вариант № 2

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x - 10}{7x - x^2 - 10}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = 2; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot \operatorname{tg} 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ 2^x & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 4 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант № 3

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}; \quad \text{а) } x_0 = -3; \quad \text{б) } x_0 = 3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x + 9}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 5 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Вариант № 4

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{а) } x_0 = -1; \quad \text{б) } x_0 = 1; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{при } x \leq -1, \\ 1 + 2x & \text{при } -1 < x < 2, \\ \frac{1}{x-2} & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант № 5

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arctg 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{1 - 4^x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tg x - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 3-x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Вариант № 6

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}; \quad \text{а) } x_0 = 5; \quad \text{б) } x_0 = -5; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tg 3x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ x+1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 7

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ x-1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 8

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = 3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-9} - 1}{x-10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ 2x^2 - 14 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 9

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x + 2}; \quad \text{а) } x_0 = -1; \text{ б) } x_0 = 2; \text{ в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \cos 7x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - 1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{при } -3 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 10

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 4x - 5}; \quad \text{а) } x_0 = 5; \text{ б) } x_0 = -5; \text{ в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{2x - 1} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \frac{1}{x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2} & \text{при } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 11

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 6x - 7}; \quad \text{а) } x_0 = -1; \quad \text{б) } x_0 = 1; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x(x-3)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 \sin x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант № 12

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x - 6}; \quad \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = 6; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{x^2(x+8)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x & \text{при } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$

Вариант № 13

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = 2; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x} - 1} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x \cdot \sin x}{\sin^2 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{2}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 3x-1 & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант № 14

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}; \quad \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = 3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg}^2 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{2}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант № 15

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}; \quad \text{а) } x_0 = 5; \quad \text{б) } x_0 = 2; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 15x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

7.4 Примерный список вопросов, задаваемых на зачете

1. Основные определения. Свойства матриц.
2. Определители второго, третьего и высшего порядка матриц. Свойства определителей матрицы.
3. Ранг матрицы. Строчечный ранг матрицы.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений (матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса).
5. Собственные значения и собственные векторы матрицы.
6. Векторы. Основные определения.
7. Действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число).
8. Действия над векторами (скалярное произведение векторов, векторное произведение векторов, смешанное произведение векторов).
9. Ортонормированный базис на плоскости и в пространстве.

10. Прямая на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Уравнение прямой (общее, неполное, в отрезках, каноническое, параметрическое, с угловым коэффициентом, проходящее через две точки).
11. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
12. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости. Уравнение плоскости (общее, неполное, параметрическое, в отрезках, проходящее через три точки).
13. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
14. Прямая в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Уравнение прямой в пространстве (общее, неполное, в отрезках, каноническое, параметрическое, с угловым коэффициентом, проходящее через две точки).
15. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.
16. Предел функции. Раскрытие неопределенностей.
17. Первый и второй замечательные пределы функции.
18. Производная функции. Таблица производных простых функций.
19. Производная сложной функции.
20. Дифференциал функции.
21. Дифференцирование функции через логарифмирование.
22. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей в пределе.
23. Исследование функции (промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума, выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба функции).
24. Асимптоты кривой (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
25. Построение графика функции.
26. Определение функции нескольких переменных.
27. Непрерывность функции нескольких переменных.
28. Частные производные различных порядков функции нескольких переменных.
29. Производная сложной функции нескольких переменных.
30. Полная производная и полный дифференциал функции нескольких переменных.
31. Точки экстремума функции нескольких переменных.
32. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма записи. Действия над ними.
33. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Действия над ними.
34. Неопределенный интеграл. Определение. Свойства.
35. Таблица основных интегралов.
36. Интегрирование тригонометрических функций, биномов, радикалов.
37. Интегрирование по частям.
38. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе (выделение полного квадрата в знаменателе, метод неопределенных коэффициентов).
39. Определенный интеграл. Определение. Свойства.
40. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
41. Приложения определенного интеграла (вычисление площади плоской фигуры, длины дуги, площади полной поверхности тела, объема тела).
42. Несобственные интегралы (интеграл с бесконечными пределами, интеграл от разрывной функции).
43. Двойной интеграл. Свойства. Вычисление в прямоугольных координатах.
44. Полярные замены в двойном интеграле.
45. Приложения двойного интеграла.
46. Тройной интеграл. Свойства. Вычисление в прямоугольных координатах.
47. Цилиндрические и сферические замены в тройном интеграле.

48. Приложения тройного интеграла.
49. Криволинейные интегралы (I и II рода). Свойства. Вычисление.
50. Дифференциальные уравнения. Основные определения. Постановка задачи Коши.
51. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешаемые в явном виде (простейшие, в полных дифференциалах и сводящиеся к ним, с разделяющимися переменными, однородные, линейные (метод Лагранжа и метод Бернулли), уравнение Бернулли).
52. Дифференциальные уравнения высшего порядка, разрешаемые через его понижение (простейшие; уравнения, не содержащие искомую функцию; уравнения, не содержащие независимую переменную).
53. Однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.
54. Неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
55. Неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
56. Числовой ряд. Основные определения. Сумма ряда.
57. Табличные ряды (геометрическая прогрессия, гармонический, обобщенно-гармонический).
58. Признаки сходимости рядов (I и II признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши, логарифмический признак, признак Раабе).
59. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
60. Абсолютно и условно сходящиеся знакопеременные ряды.
61. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса.
62. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.
63. Ряды Тейлора и Маклорена. Табличные разложения функций в ряд Маклорена.
64. Приложения ряда Тейлора.
65. Ряд Фурье. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.
66. Интеграл Фурье.

8 Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

8.1 Перечень учебной литературы

Наименование печатных и (или) электронных учебных изданий, методические издания, периодические издания по всем входящим в реализуемую образовательную программу учебным предметам, курсам, дисциплинам (модулям) <i>в соответствии с рабочими программами дисциплин, модулей, практик</i>		Количество экземпляров	Обеспеченность студентов учебной литературой (экземпляров на одного студента)
Электронные учебные издания, имеющиеся в электронном каталоге электронно-библиотечной системы	Шипачев, Виктор Семенович. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. - 8-е изд., пер. и доп. - Москва : Юрайт, 2026. - 351 с.	1	1
	Мачулис, Владислав Владимирович. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. В. Мачулис. - 5-е изд., пер. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 306 с.	1	1
	Лурье, Инна Григорьевна. Высшая математика. Практикум : Учебное пособие / И. Г. Лурье, Т. П. Фунтикова. - 1. - Москва : Вузовский учебник, 2023. - 160 с.	1	1

8.2 Современные профессиональные базы данных, информационные справочные и электронно-библиотечные системы

№	Ссылка на информационный ресурс	Наименование ресурса в электронной форме	Доступность
Электронно-библиотечные системы			
1	https://dlib.eastview.com	База данных «Ивис»	Авторизованный доступ
2	https://urait.ru	Образовательная платформа Юрайт	Авторизованный доступ
3	http://www.iprbookshop.ru	ЭБС IPR SMART	Авторизованный доступ
4	http://znanium.com	ЭБС «Znanium»	Авторизованный доступ
5	https://e.lanbook.com	ЭБС «Лань»	Авторизованный доступ
6	https://lib.rucont.ru	ЭБС «Руcont»	Авторизованный доступ
7	https://ldiss.rsl.ru	Электронная библиотека диссертаций РГБ	Авторизованный доступ
Информационные справочные системы			
8	http://garant.ugrasu.ru/	СПС Гарант	Авторизованный доступ
9	http://www.consultant.ru/	СПС КонсультантПлюс	Авторизованный доступ
Профессиональные базы данных			
10	https://ugrasu.dc-ipk.ru/docs/	Информационно-справочная система Техэксперт	Авторизованный
11	http://elibrary.ru	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU	Авторизованный доступ

8.3 Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, в том числе отечественного производства

MapInfo 2019;
MathType;
Антивирус DrWeb;

8.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины

8.4.1 Учебная аудитория лекционного типа

компьютер/ноутбук, проектор, экран, учебная мебель, учебная доска

8.4.2 Учебная аудитория для проведения практических занятий

учебная мебель, учебная доска

8.4.3 Учебная аудитория для самостоятельной работы

учебная мебель, компьютеры с выходом в интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде

8.4.4 Компьютерный класс

учебная мебель, учебная доска, компьютеры с доступом в Интернет

